105年 台灣大學 試題

解題老師：周易

系所：醫工所(甲組)、化工系、高分子所、食科所(丁組)　科目：工程數學(E)

1. 是非題（請標明題號(1)~(5)，依順序作答，正確請寫「○」，不正確請寫「×」）：R 、S 、T 均爲 2 階方陣，I 爲 2 階單位方陣，下列敘述是否正確？

(1) 假設 R 爲正交可對角化(orthogonally diagonalizable)矩陣，則 R 必爲對稱矩陣。(2%)

(2) 假設 R 、S 均爲旋轉矩陣，則 $RS = SR$ 。(2%)

(3) $R^2 - S^2 = (R+S)(R-S)$ 。(2%)

(4) 假設 $RS = T$ ，則 $S = R^{-1}T$ 。(2%)

(5) 假設 $RS = I$ ，則 $S^2R^2 = I$ 。(2%)

2. 解微分方程式，其中 y 爲 x 的函數：(8%)

$$\sin(y)y' = \cos(y)[1 - x\cos(y)]$$

建議：可令 $u = \dfrac{1}{\cos(y)}$

3. 解微分方程式，其中 y 爲 x 的函數：(8%)

$$x[\ln(x)]y'' - y' - x[\ln^3(x)]y = 0$$

4. 解微分方程組，其中 y_1 及 y_2 均爲 t 的函數：(8%)

$$\left\{\begin{matrix} ty_1' - y_1 - 3y_2 = 0 \\ ty_2' - y_1 + y_2 = 0 \end{matrix}\right\}$$

5. (1) 求下列函數之 Laplace 轉換：(8%)

$$2e^{-t}[\sin^2(t)]$$

(2) 求下列函數之 Laplace 反轉換：(8%)

$$\ln\left(\frac{s^2-4}{s^2}\right)$$

6. 以下答題時所用符號皆須定義。

(1) 何謂平面上的格林定理(Green's theorem)? (5%)以向量場 $(y^2 - 7y)\vec{i} + 2x(y+1)\vec{j}$ ，曲線 $x^2 + y^2 = 1$ 爲例，證明該定理。(5%)

(2) 何謂史脫克斯定律(Stokes'law)?(5%)以向量場 $-y\vec{i}+x\vec{j}-xyz\vec{k}$ ，曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ ，$x^2+y^2\le 9$ ，與曲線 $x^2+y^2=9$ ， $z=3$ 爲例，證明該定律。(10%)

7. 在所給定的條件下，解以下的偏微分方程，其中 T 爲 x 與 t 的函數：(25%)

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2},\ 0<x<1,\ 0<t$$

$$T(x=0,t)=0,\ 0<t$$

$$T(x,t=0)=f(x),\ 0<x<1$$

105年 台灣大學 解答

解題老師：周易

系所：醫工所(甲組)、化工系、高分子所、食科所(丁組)　科目：工程數學(E)

1. (1) 當 R 可正交對角化, $R=SDS^{-1}$, $S^{-1}=S^T$

$R^T=(SDS^T)^T=(S^T)^T D^T S^T=SDS^T=R$, R 爲對稱, 取 True

(2) 設 R 與 S 分別爲逆時針旋轉 θ 與 ϕ 角之旋轉矩陣, 則 RS 與 SR 分別爲逆時針轉 $\theta+\phi$ 與 $\phi+\theta$ 之旋轉矩陣 $RS=SR$ 。取 True

(3) $(R+S)(R-S)=R^2-RS+SR-S^2\neq R^2-S^2$ 。取 false

(4) $RS=T$, $S=R^{-1}T$ 不一定成立, 需 R^{-1} 存在才成立。取 false

(5) $RS=I$, $S^2R^2=SSRR=SIR=SR=I$ 。取 True

本題答案(1)○ (2)× (3)× (4)× (5)○

2. $\sin y\cdot\dfrac{dy}{dx}=\cos y\cdot[1-x\cos y]$, $\dfrac{-d\cos y}{dx}=\cos y[1-x\cos y]$,

依據提示, 令 $u=\dfrac{1}{\cos y}$, $\cos y=\dfrac{1}{u}$, $\dfrac{d\cos y}{dx}=\dfrac{d\left(\frac{1}{u}\right)}{dx}=-\dfrac{1}{u^2}\dfrac{du}{dx}$

代入 ODE $\dfrac{1}{u^2}\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{u}\left(1-x\cdot\dfrac{1}{u}\right)$, $\dfrac{du}{dx}=u-x$, $(D-1)u=-x$

$u_h=ce^x$, $u_p=\dfrac{1}{D-1}(-x)=\dfrac{1}{1-D}x=(1+D+D^2+\cdots)x=x+1$

$u=ce^x+x+1$, $\dfrac{1}{\cos y}=ce^x+x+1$, $\cos y=\dfrac{1}{ce^x+x+1}$

$y=\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{ce^x+x+1}\right)$

3. $x\ln x\cdot y''-y'-x(\ln x)^3y=0$, $y''-\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{\ln x}y'-(\ln x)^2y=0$

$p=\dfrac{-1}{x}\cdot\dfrac{1}{\ln x}$, $Q=-(\ln x)^2$, 令 $z'=\sqrt{\dfrac{Q}{a}}=\sqrt{\dfrac{-(\ln x)^2}{-1}}=\ln x$

代入 $\dfrac{z''+pz'}{(z')^2}=\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{-1}{x}\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\ln x}{(\ln x)^2}=0$, 換 x 成立

令 $z'=\ln x$， $z=\int \ln x dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - x$

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\ln x$， $y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\ln x\cdot\frac{dy}{dz}\right)$

$y''=\frac{1}{x}\frac{dy}{dz}+\ln x\cdot\frac{d\left(\frac{dy}{dz}\right)}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dz}+\ln x\cdot\frac{d\left(\frac{dy}{dz}\right)}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dz}+(\ln x)^2\frac{d^2y}{dz^2}$

代入 ODE $y''-\frac{1}{x\ln x}y'-(\ln x)^2 y=0$

$\left[\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+(\ln x)^2\frac{d^2y}{dz^2}\right]-\frac{1}{x\ln x}\ln x\frac{dy}{dz}-(\ln x)^2 y=0$， $\frac{d^2y}{dz^2}-y=0$

$y=c_1e^z+c_2e^{-z}$， $y=c_1\exp(x\ln x-x)+c_2\exp(x-x\ln x)$

4. 令 $t=e^x$， $x=\ln t$，ODE 成爲

$$\begin{cases}\frac{dy_1}{dx}-y_1-3y_2=0\\ \frac{dy_2}{dx}-y_1+y_2=0\end{cases}，\quad \begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}'=\begin{bmatrix}1&3\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}，\quad \vec{y}'=A\vec{y}$$

將 A 對角化，$A=SDS^{-1}$， $D=\begin{bmatrix}-2&0\\0&2\end{bmatrix}$， $S=\begin{bmatrix}1&3\\-1&1\end{bmatrix}$， $\vec{y}=S\vec{z}$

代入 $\vec{y}'=A\vec{y}$， $S\vec{z}'=SDS^{-1}\cdot S\vec{z}$， $\vec{z}'=D\vec{z}$， $\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}'=\begin{bmatrix}-2&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}$， $z_1'=-2z_1$， $z_2'=2z_2$

$z_1=c_1e^{-2x}$， $z_2=c_2e^{2x}$， $\vec{y}=S\vec{z}$

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1e^{-2x}\\c_2e^{2x}\end{bmatrix}=c_1e^{-2x}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}e^{2x}=c_1\frac{1}{t^2}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}+c_2t^2\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$$

5. (1) $L[2e^{-t}\sin^2 t]=L[e^{-t}(1-\cos 2t)]=L[1-\cos 2t]\big|_{s=s+1}=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}\Big|_{s=s+1}$

$$=\frac{1}{s+1}-\frac{s+1}{(s+1)^2+4}=\frac{1}{s+1}-\frac{s+1}{s^2+2s+5}$$

(2) $L^{-1}\left[\ln\frac{s^2-4}{s^2}\right]=-\frac{1}{t}L^{-1}\left[\frac{d}{ds}\ln\frac{s^2-4}{s^2}\right]=-\frac{1}{t}L^{-1}\left[\frac{d}{ds}(\ln(s^2-4)-\ln s^2)\right]$

$$=-\frac{1}{t}L^{-1}\left[\frac{2s}{s^2-4}-\frac{2}{s}\right]=-\frac{1}{t}[2\cosh 2t-2]=-\frac{1}{t}[e^{2t}+e^{-2t}-2]$$

6. (1) c 爲 xy 平面上之封閉曲線，R 爲曲線 c 包圍之區域

$f(x,y)$ 與 $g(x,y)$ 在 c 上和 c 內沒有奇異點, 則

$\oint_C (f dx + g dy) = \iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy$ 爲 Green's 定理

令 $\vec{F} = (y^2 - 7y)\vec{i} + 2x(y+1)\vec{j}$, $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C (y^2 - 7y)dx + 2x(y+1)dy$

執行線積分 $c: x^2 + y^2 = 1$, $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2\theta - 7\sin\theta)\cdot(-\sin\theta)d\theta + 2\cos\theta(\sin\theta + 1)\cos\theta d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (7\sin^2\theta + 2\cos^2\theta)d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{7}{2}(1 - \cos 2\theta) + (1 + \cos 2\theta)d\theta = 9\pi$$

再執行面積分

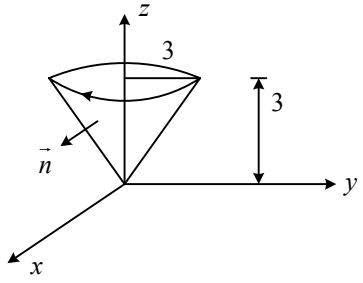
$$\oint_C (y^2 - 7y)dx + (2xy + 2x)dy = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(2xy + 2x) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2 - 7y)\right] dxdy$$

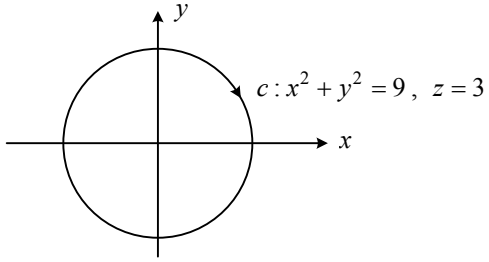
$$= \iint_R (2y + 2 - 2y + 7)dxdy = 9 \cdot A = 9 \cdot \pi \cdot 1^2 = 9\pi$$

得 $\oint_C [(y^2 - 7y)dx + 2x(y+1)dy] = 9\pi = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(2xy + 2x) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2 - 7y)\right] dxdy$

Green's theorem 成立

(2) S 爲空間中有開口曲面, C 爲 S 之邊界曲線, $\vec{F}$ 在曲面 S 上沒有奇異點,
則 $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dA$ 爲 Stoke's theorem





$\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j} - xyz\vec{k}$, 先執行線積分 $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

on $c: z = 3$, $x^2 + y^2 = 9$, $x = 3\cos\theta$, $y = 3\sin\theta$

$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} = (-3\sin\theta\vec{i} + 3\cos\theta\vec{j})d\theta$

$\vec{F} = -3\sin\theta\vec{i} + 3\cos\theta\vec{j} - 27\cos\theta\cdot\sin\theta\vec{k}$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{2\pi}^{0} (9\sin^2\theta + 9\cos^2\theta)d\theta = \int_{2\pi}^{0} 9d\theta = -18\pi$$

再執行面積分 $\iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}dA$

$\nabla\times\vec{F}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\times(-y\vec{i}+x\vec{j}-xyz\vec{k})=-xz\vec{i}+yz\vec{j}+2\vec{k}$

$\vec{n}dA=\frac{\nabla\phi}{\left|\nabla\phi\cdot\vec{k}\right|}dxdy$，$\phi=\sqrt{x^2+y^2}-z$

$\nabla\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j}-\vec{k}$

$\vec{n}dA=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j}-\vec{k}\right)dxdy$

$\iint_S(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}dA=\iint_{S_{xy}}\left(\frac{-x^2z+y^2z}{\sqrt{x^2+y^2}}-2\right)dxdy=\iint_{S_{xy}}\left(\frac{(y^2-x^2)\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}-2\right)dxdy$

$=\iint(y^2-x^2-2)dxdy=\int_0^3\int_0^{2\pi}(r^2\sin^2\theta-r^2\cos^2\theta-2)rd\theta dr$

$=\int_0^3(r^3\pi-r^3\pi-4\pi r)dr=-2\pi\cdot3^2=-18\pi$

得 $\oint_C\vec{F}\cdot d\vec{r}=-18\pi=\iint_S(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}dA$ 成立

7. 本題少 $x=1$ 之邊界條件, PDE 無法解出,

自行假設 $T(x=1,t)=0$，令 $T(x,t)=X(x)\cdot\phi(t)$ 代入 $\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial^2T}{\partial x^2}$

$XT'=X''T$，$\frac{T'}{T}=\frac{X''}{X}=\lambda$，

$X''-\lambda X=0$，$\phi'-\lambda\phi=0$，$X(0)=0$，$X(1)=0$

當 $\lambda>0$，令 $\lambda=\beta^2$，$\beta>0$，$X=c_1\cosh\beta x+c_2\sinh\beta x$

代入 $X(0)=0$，$c_1=0$，$X(1)=0$，$c_2=0$

當 $\lambda=0$，$X=c_1+c_2x$，代入 $X(0)=0$，$c_1=0$，$X(1)=0$，$c_2=0$

當 $\lambda<0$，令 $\lambda=-\beta^2$，$\beta>0$，$X=c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x$

代入 $X(0)=0$，$c_1=0$，$X=c_2\sin\beta x$

代入 $X(1)=0$，$c_2\sin\beta=0$，當 $\beta=n\pi$，$n=1,2,3,\cdots$，c_2 爲任意數

特徵值 $\lambda_n=-\beta^2=-n^2\pi^2$，特徵函數 $X_n(x)=c_n\sin n\pi x$

將 $\lambda_n=-n^2\pi^2$ 代入 $\phi'-\lambda\phi=0$，$\phi'+n^2\pi^2\phi=0$，$\phi=ke^{-n^2\pi^2t}$

$T(x,t)=X(x)\phi(t)=c_n\sin n\pi x\cdot ke^{-n^2\pi^2t}$，令 $B_n=c_n\cdot k$

$T(x,t)=B_n\cdot e^{-n^2\pi^2t}\cdot\sin n\pi x$ ， $n=1,2,3\cdots$

都是齊性 PDE 之齊性解, 齊性 PDE 通解

$$T(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n e^{-n^2\pi^2t}\sin n\pi x$$

代入條件 $T(x,0)=f(x)$， $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin n\pi x$

$$B_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx$$

得解 $T(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx e^{-n^2\pi^2t}\cdot\sin n\pi x$

說明：若假設不同的邊界條件，例如 $T_x(1,t)=0$, 可得到不同的特徵函數, PDE 之解就不相同。