105年 台灣大學 試題

解題老師：周易

系所：生物產業機電工程所(甲、乙、丙、丁組)　科目：工程數學(J)

1. 解下列微分方程式之 envelope (singular solution)，並畫出圖形。(15%)

$y = cx + c^{-1}$

2. 解下列微分方程式：(15%)

$x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 24x^5$

$y(1) = 1,\ y'(1) = 3,\ y''(1) = 14$

3. (1) 說明 Laplace Transformation 如何在 t-domain 及 s-domain 求解常微分方程式。(5%)

(2) 以 Laplace Transformation 方法求解下列微分方程式：(15%)

$y'' + 10y' + 24y = 144t^2\ ;\ y(0) = \frac{19}{12},\ y'(0) = -5$

4. 已知微分方程式：$EI\frac{d^4y}{dx^4} + ky = w(x)$，$-\infty < x < \infty$，$E$，$I$ 及 k 均爲常數。其中，$w(x)$ 爲一周期函數，定義如下

$$w(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < -\pi/2 \\ w_0, & -\pi/2 \le x \le \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < x < \pi \end{cases}, \quad w(x + 2\pi) = w(x)$$

(1) 試求 $w(x)$ 的傅立葉級數(Fourier series)。(8%)

(2) 試求微分方程式的特解 $y_p(x) = ?$ (7%)

5. 求解下列邊界值問題(boundary-value problem)：(20%)

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ u(0,y) = 0,\ u(\pi,y) = 1,\ u(x,0) = 0,\ u(x,y_0) = 0,$ 其中 y_0 爲常數。

6. (1) 已知向量 $\vec{v} = Q(x,y)\vec{i} - P(x,y)\vec{j}$，證明線積分 $\int_C Pdx + Qdy = \int_C \vec{v}\cdot\vec{n}ds$，其中 s 爲曲線 C 的弧長變數，$\vec{n}$ 爲曲線 C 的單位法線向量。(6%)

(2) 試求

$$\oint_C \frac{\partial}{\partial n} \ln\left[\frac{1}{(x-2)^2+y^2}\right] ds = ?$$

其中 $C : x^2 + y^2 = 1$，n 爲曲線 C 上指向外的單位法線向量。s 爲曲線 C 的弧長參數。(9%)

105年 台灣大學 解答

解題老師：周易

系所：生物產業機電工程所(甲、乙、丙、丁組)　科目：工程數學(J)

1. $y=cx+\frac{1}{c}$，$y'=c$ 代入通解中，得 $y=xy'+\frac{1}{y'}$

令 $p=y'$，$y=xp+\frac{1}{p}$ 爲一階二次 ODE，微分一次

$dy=xdp+pdx+\frac{-1}{p^2}dp$，除 dx

$\frac{dy}{dx}=x\frac{dp}{dx}+p\frac{dx}{dx}-\frac{1}{p^2}\frac{dp}{dx}$，$p=x\frac{dp}{dx}+p-\frac{1}{p^2}\frac{dp}{dx}$

$\left(x-\frac{1}{p^2}\right)\frac{dp}{dx}=0$，奇異解 $x-\frac{1}{p^2}=0$，$p^2=\frac{1}{x}$，$p=y'=\pm\frac{1}{\sqrt{x}}$

$y=\pm2\sqrt{x}+c$　代入 ODE　$y=px+\frac{1}{p}$ 找多餘積分常數

$\pm2\sqrt{x}+c=x\cdot\frac{1}{\pm\sqrt{x}}+(\pm\sqrt{x})$，得 $c=0$

$y=\pm2\sqrt{x}$，$x=\frac{1}{4}y^2$ 爲包絡線(奇異解)

2. 令 $x=e^t$，$t=\ln x$　代入　$x^3y'''-3x^2y''+6xy'-6y=24x^5$

$D_t(D_t-1)(D_t-2)y-3D_t(D_t-1)y+6D_ty-6y=24e^{5t}$

$(D_t^3-3D_t^2+2D_t)y-3(D_t^2-D_t)y+6D_ty-6y=24e^{5t}$

$(D_t^3-6D_t^2+11D_t-6)y=24e^{5t}$，$(D_t-1)(D_t-2)(D_t-3)y=24e^{5t}$

$y_h=c_1e^t+c_2e^{2t}+c_3e^{3t}=c_1x+c_2x^2+c_3x^3$

$y_p=\frac{1}{(D_t-1)(D_t-2)(D_t-3)}24e^{5t}=\frac{1}{4\cdot3\cdot2}24e^{5t}=x^5$

通解　$y=c_1x+c_2x^2+c_3x^3+x^5$

代入　$y(1)=1$，$c_1+c_2+c_3+1=1$，$c_1+c_2+c_3=0$

$y'(1)=3$，$c_1+2c_2+3c_3+5=3$，$c_1+2c_2+3c_3=-2$

$y''(1)=14$，$2c_2+6c_3+20=14$，$c_2+3c_3=-3$

$c_1=1,\ c_2=0,\ c_3=-1$

$y=x-x^3+x^5$

3. (1) $ay''(t)+by'(t)+cy(t)=f(t),\ y(0)=k_1,\ y'(0)=k_2$

爲 t domain 之 ODE

$a\cdot L[y'']+b\cdot L[y']+c\cdot L[y]=L[f(t)]$

$a[s^2Y-sk_1-k_2]+b[sY-k_1]+cY=F(s)$

$(as^2+bs+c)Y=ask_1+ak_2+bk_1+F(s)$

$$Y=\frac{ak_1s+ak_2+bk_1}{as^2+bs+c}+\frac{1}{as^2+bs+c}\cdot F(s)$$

爲 s domain 之代數 ODE

$$y=L^{-1}\left[\frac{ak_1s+ak_2+bk_1}{as^2+bs+c}\right]+L^{-1}\left[\frac{1}{as^2+bs+c}F(s)\right]$$

(2) $L[y''+10y'+24y]=144\cdot L[t^2]=$

$$[s^2Y-sy(0)-y'(0)]+10[sY-y(0)]+24Y=144\cdot\frac{2}{s^3}$$

$$(s^2+10s+24)Y-\frac{19}{12}s+5-10\cdot\frac{19}{12}=\frac{288}{s^3}$$

$$(s^2+10s+24)Y=\frac{19}{12}s+\frac{65}{6}+\frac{288}{s^3}$$

$$Y=\frac{\frac{19}{12}s+\frac{65}{6}}{s^2+10s+24}+\frac{288}{s^3(s^2+10s+24)}$$

$$=\frac{\frac{19}{12}s+\frac{65}{6}}{s^2+10s+24}+\frac{-\frac{19}{12}s-\frac{65}{6}}{s^2+10s+24}+\frac{\frac{19}{12}}{s}-\frac{5}{s^2}+\frac{12}{s^3}$$

$$Y=\frac{19}{12}\cdot\frac{1}{s}-\frac{5}{s^2}+\frac{12}{s^3},\quad y=\frac{19}{12}-5t+6t^2$$

4. (1) $w(x)$ 爲週期 2π 偶函數, 取 Fourier cosine series

$$w(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,\quad a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}w(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}w_0dx=\frac{1}{2}w_0$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}w(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}w_0\cdot\cos nxdx=\frac{2w_0}{n\pi}\sin\frac{n}{2}\pi$$

$$w(x)=\frac{1}{2}w_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2w_0}{n\pi}\sin\frac{n}{2}\pi\cos nx$$

(2) $(EID^4+k)y=w(x)$, $y_p=\frac{1}{EID^4+k}\cdot\frac{1}{2}w_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2w_0}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi}{2}\cdot\frac{1}{EID^4+k}\cdot\cos nx$

$y_p=\frac{w_0}{2k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2w_0}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\cdot\frac{1}{EIn^4+k}\cos nx$

5. 取 y 方向 Fourier sine series

$u(x,y)=\frac{2}{y_0}\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi y}{y_0}$, $B_n=\int_0^{y_0}u(x,y)\sin\frac{n\pi y}{y_0}dy$

$\int_0^{y_0}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin\frac{n\pi y}{y_0}dy+\int_0^{y_0}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin\frac{n\pi y}{y_0}dy=0$, 部份積分二次

$\frac{d^2}{dx^2}B_n-\left(\frac{n\pi}{y_0}\right)^2B_n=0$, $B_n=c_1\cosh\frac{n\pi x}{y_0}+c_2\sinh\frac{n\pi x}{y_0}$

又 $B_n=\int_0^{y_0}u(x,y)\sin\frac{n\pi y}{y_0}dy$

取 $x=0$, $u(0,y)=0$, $B_n=0$, $c_1=0$

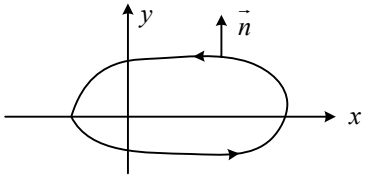
取 $x=\pi$, $u(\pi,y)=1$, $c_2\sinh\frac{n\pi^2}{y_0}=\int_0^{y_0}1\cdot\sin\frac{n\pi y}{y_0}dy$

$c_2=\frac{1}{\sinh\frac{n\pi^2}{y_0}}\cdot\frac{y_0}{n\pi}[1-(-1)^n]$, $B_n=\frac{y_0}{n\pi}[1-(-1)^n]\frac{\sinh\frac{n\pi x}{y_0}}{\sinh\frac{n\pi\pi}{y_0}}$

代入 $u=\frac{2}{y_0}\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi y}{y_0}$

$u=\frac{2}{y_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_0}{n\pi}[1-(-1)^n]\frac{\sinh\frac{n\pi x}{y_0}}{\sinh\frac{n\pi\pi}{y_0}}\sin\frac{n\pi y}{y_0}$ 爲解

6. (1)



$\vec{n}ds=d\vec{r}\times\vec{k}=(dx\vec{i}+dy\vec{j})\times\vec{k}=dy\vec{i}-dx\vec{j}$

$$\oint_C \vec{v}\cdot\vec{n}ds=\oint_C (Q\vec{i}-P\vec{j})\cdot(dy\vec{i}-dx\vec{j})=\oint_C (Pdx+Qdy)$$ 證畢

(2) $\oint_C \frac{\partial}{\partial n}\ln\left[\frac{1}{(x-2)^2+y^2}\right]ds=\oint\nabla\ln\left[\frac{1}{(x-2)^2+y^2}\right]\cdot\vec{n}ds$，用平面散度定理

$$=\iint_R \nabla\cdot\nabla\ln\left[\frac{1}{(x-2)^2+y^2}\right]dA,\quad R:x^2+y^2\le 1$$

又 $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\left[\frac{1}{(x-2)^2+y^2}\right]=-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\ln[(x-2)^2+y^2]=-\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{2(x-2)}{(x-2)^2+y^2}$$

$$=-\frac{2[(x-2)^2+y^2]-2(x-2)\cdot 2(x-2)}{[(x-2)^2+y^2]^2}=\frac{-2y^2+2(x-2)^2}{[(x-2)^2+y^2]^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\ln\left[\frac{1}{(x-2)^2+y^2}\right]=-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\ln[(x-2)^2+y^2]=-\frac{\partial}{\partial y}\frac{2y}{(x-2)^2+y^2}$$

$$=-\frac{2[(x-2)^2+y^2]-2y\cdot 2y}{[(x-2)^2+y^2]^2}=-\frac{2(x-2)^2-2y^2}{[(x-2)^2+y^2]^2}$$

$$\nabla^2\ln\left[\frac{1}{(x-2)^2+y^2}\right]=\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\ln\left[\frac{1}{(x-2)^2+y^2}\right]=0$$

得 $\oint_C \frac{\partial}{\partial n}\ln\left[\frac{1}{(x-2)^2+y^2}\right]ds=0$