105年 台灣大學 試題

解題老師：周易

系所：工程科學及海洋工程所(丙組)　　科目：工程數學(L)

1. Calculate the convolution of $x(t)$ and $h(t)$. (15%)

$$u(t)=1,\ t\geq 0;\ u(t)=0,\ t<0.$$

$$x(t)=e^{-at}u(t),\ a>0 \text{ and } h(t)=u(t)$$

2. Determine Fourier transform of $x(t)$

(1) $x(t)=\delta(t)$ (10%)

(2) $x(t)=\cos\omega t$ (10%)

(3) $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)$, T is the period and k is an integer (15%)

3. 請解下列微分方程式 (25%)

$$2xy\frac{dy}{dx}=y^2-x^2$$

並使用已知條件（當 $x=4$ 時， $y=0$ ）決定積分常數。

4. 請計算下列積分值 (25%)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-Q}dx_1dx_2$$

已知 $Q=3x_1^2+2x_1x_2+3x_2^2$

提示：可利用積分結果，當 $a>0$ 時，

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

105年 台灣大學 解答

解題老師：周易

系所：工程科學及海洋工程所(丙組)　　科目：工程數學(L)

1. $L[x(t)*h(t)]=L[x(t)]\cdot L[h(t)]=\dfrac{1}{s+a}e^{-0s}\cdot\dfrac{1}{s}e^{-0s}=\left(\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+a}\right)\dfrac{1}{a}e^{-0s}$

$x(t)*h(t)=L^{-1}\left[\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+a}\right)e^{-0s}\right]=\dfrac{1}{a}u(t)\cdot(1-e^{-at})$，　$-\infty<t<\infty$

2. (1) $F[\delta(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\cdot e^{-i\omega 0}dt=1$

(2) $F[\cos\omega t]=\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega t\cdot e^{-i\alpha t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{1}{2}[e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}]e^{-i\alpha t}dt$

$=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}[e^{-i(\alpha-\omega)t}+e^{-i(\alpha+\omega)t}]dt$

$=\dfrac{1}{2}[2\pi\cdot\delta(\alpha-\omega)+2\pi\delta(\alpha+\omega)]=\pi[\delta(\alpha-\omega)+\delta(\alpha+\omega)]$

(3) $F[x(t)]=F\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)\right]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}F[\delta(t-kT)]$

$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)e^{-i\alpha t}dt=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)\cdot e^{-i\alpha kT}dt$

$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-i\alpha kT}\cdot 1=1+[e^{i\alpha T}+e^{-i\alpha T}]+[e^{i2\alpha T}+e^{-i2\alpha T}]+\cdots$

$=1+2\cos\alpha T+2\cos 2\alpha T+2\cos 3\alpha T+\cdots=1+2\sum_{k=1}^{\infty}\cos k\alpha T$

3. $2xydy=(y^2-x^2)dx$，　$2xydy-y^2dx=-x^2dx$

$xdy^2-y^2dx=-x^2dx$，令 $z=y^2$，　$xdz-zdx=-x^2dx$

乘 $\dfrac{1}{x^2}$，　$\dfrac{xdz-zdx}{x^2}=-dx$，　$d\left(\dfrac{z}{x}\right)=-dx$，　$\dfrac{z}{x}=-x+c$

$z=-x^2+cx$，　$y^2=-x^2+cx$，　$y=\pm\sqrt{-x^2+cx}$

代入條件 $y(4)=0$，　$0=\pm\sqrt{-16+4c}$，　$c=4$

$y=\pm\sqrt{-x^2+4x}$ 爲解

4. $Q = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \vec{x}^T A \vec{x}$

將 A 正交對角化，$A = SDS^{-1}$，$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$，$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$，$S^T = S^{-1}$

令 $\vec{x} = S\vec{y}$，代入 $Q = \vec{x}^T A\vec{x} = (S\vec{y})^T \cdot SDS^{-1} \cdot S\vec{y} = \vec{y}^T D\vec{y} = 2y_1^2 + 4y_2^2$

$dx_1dx_2 = dy_1dy_2$，S 爲旋轉矩陣，保長

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Q}dx_1dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(2y_1^2+4y_2^2)}dy_1dy_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2}dy_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4y_2^2}dy_2$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$